Solution Série de TD N°1

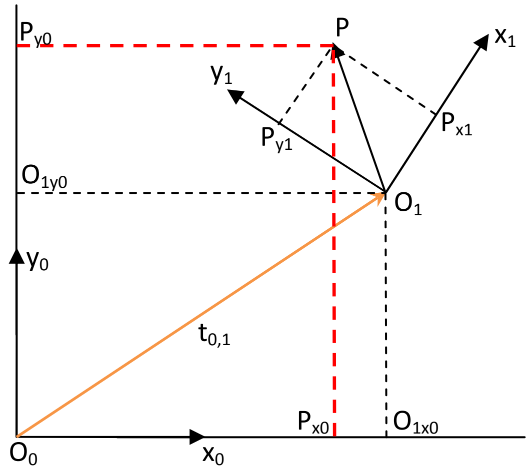
Exo1 : Dans le plan 2D

Dans la figure ci-contre les coordonnées du point P dans le repère {R1} sont : (P_{x1}, P_{y1})

- Exprimer les coordonnées (P_{x0}, P_{y0}) du point P dans le repère {R0} en fonction de ses coordonnées dans le repère {R1}
- Déduire la transformation homogène $A_{0,1}$ qui permet le passage du repère {R1} vers le repère {R0}.

Solution :

1- Comme on l'a vu dans le cours, les coordonnées de P exprimées dans le repère {R0} sont calculées come suit :



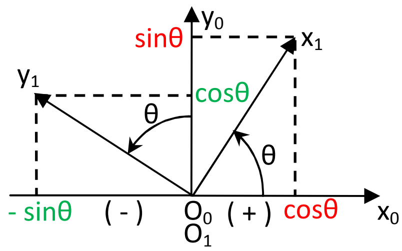
$$p_0 = t_{0,1} + R_{0,1}\; p_1 \quad (1)$$

Avec : $p_0 = \begin{bmatrix} p_{x0} \\ p_{y0} \end{bmatrix}$; $p_1 = \begin{bmatrix} p_{x1} \\ p_{y1} \end{bmatrix}$

$t_{0,1} = \begin{bmatrix} O_{1x0} \\ O_{1y0} \end{bmatrix}$: le vecteur position du repère {R1} (son origine O_1) par rapport au repère {R0}

$R_{0,1}$: la matrice de rotation du repère {R1} par rapport au repère {R0}. (voir le schéma ci-dessus où on élimine la translation entre les deux repères pour faire apparaitre uniquement l'orientation caractérisée par l'angle θ).

Par projections on retrouve la matrice de rotation du repère {R1} par rapport au repère {R0} :



$$R_{0,1} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

2- La transformation homogène $A_{0,1}$ qui permet le passage du repère {R1} vers le repère {R0} est construire comme expliqué dans le cours, comme suit :

$$A_{0,1} = \begin{bmatrix} R_{0,1} & t_{0,1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & O_{1x0} \\ \sin\theta & \cos\theta & O_{1y0} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cette transformation permet d'exprimer les coordonnées du point P dans le repère {R0} :

$\bar{p}_0 = A_{0,1}\,\bar{p}_1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} p_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{0,1} & t_{0,1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Cette transformation est équivalente à celle de l'équation (1).

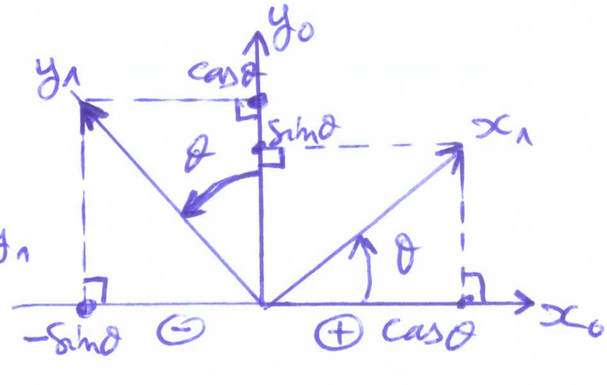
Série de TD N° 1 :

Exo 3 :

* Matrice de rotation $R_{0,1}$:

$$R_{0,1} = \begin{array}{c|cc} & x_1 & y_1 \\ \hline x_0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ y_0 & \sin\theta & \cos\theta \end{array}$$

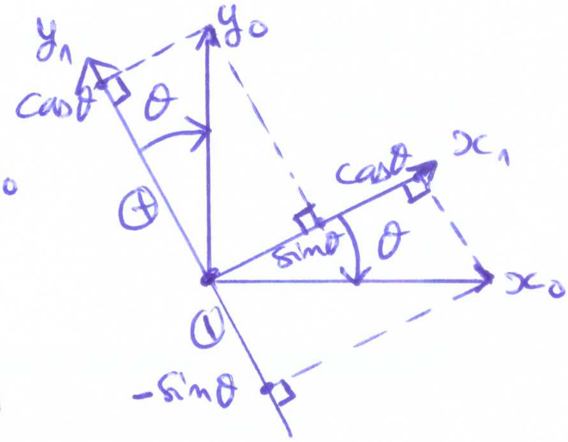
projection des axes x_1, y_1 sur les axes x_0, y_0



* Matrice de rotation $R_{1,0}$:

$$R_{1,0} = \begin{array}{c|cc} & x_0 & y_0 \\ \hline x_1 & \cos\theta & \sin\theta \\ y_1 & -\sin\theta & \cos\theta \end{array}$$

projection des axes x_0, y_0 sur les axes x_1, y_1.

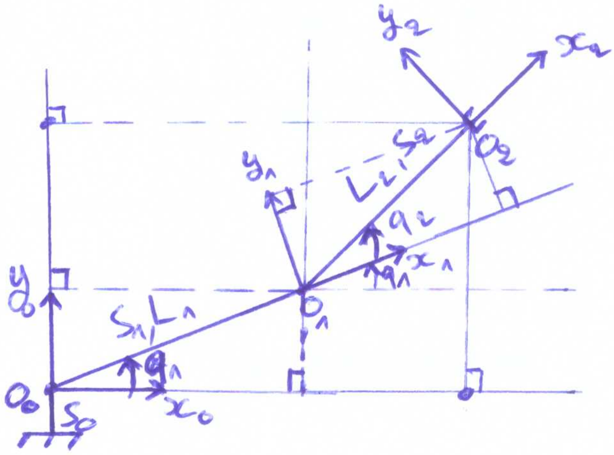


* On remarque que $R_{1,0} = R_{0,1}^T = R_{0,1}^{-1}$

Exo 4 :

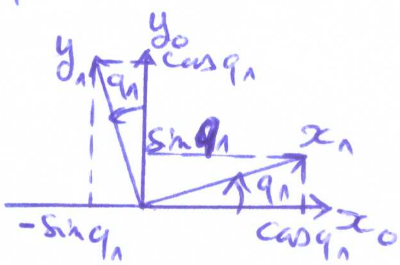
1) les segments : S_0 : la base, S_1 et S_2.
2) les variables articulaires : q_1 et q_2.
3) les paramètres géométriques : L_1 et L_2.
4) Transformations homogènes :

- Position du repère {1} par rapport au repère {0}.



$$\overrightarrow{O_0O_1} = t_{0,1} = \begin{bmatrix} L_1 \cos q_1 \\ L_1 \sin q_1 \end{bmatrix}$$

$$R_{0,1} = \begin{array}{c|cc} & x_1 & y_1 \\ \hline x_0 & \cos q_1 & -\sin q_1 \\ y_0 & \sin q_1 & \cos q_1 \end{array}$$



$$A_{0,1} = \left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{R_{0,1}} & t_{0,1} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} \cos q_1 & -\sin q_1 & L_1 \cos q_1 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & L_1 \sin q_1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

* Position du repère {2} par rapport au repère {1}.

$$\overrightarrow{O_1 O_2} = t_{1,2} = \begin{bmatrix} L_2 \cos q_2 \\ L_2 \sin q_2 \end{bmatrix}.$$

Rotation du repère {2} par rapport au repère {1}.
de la même manière on obtient $R_{1,2}$:

$$R_{1,2} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ y_1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_2 & \quad y_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 \\ \sin q_2 & \cos q_2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A_{1,2} = \left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{R_{1,2}} & t_{1,2} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} \cos q_2 & -\sin q_2 & L_2 \cos q_2 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & L_2 \sin q_2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

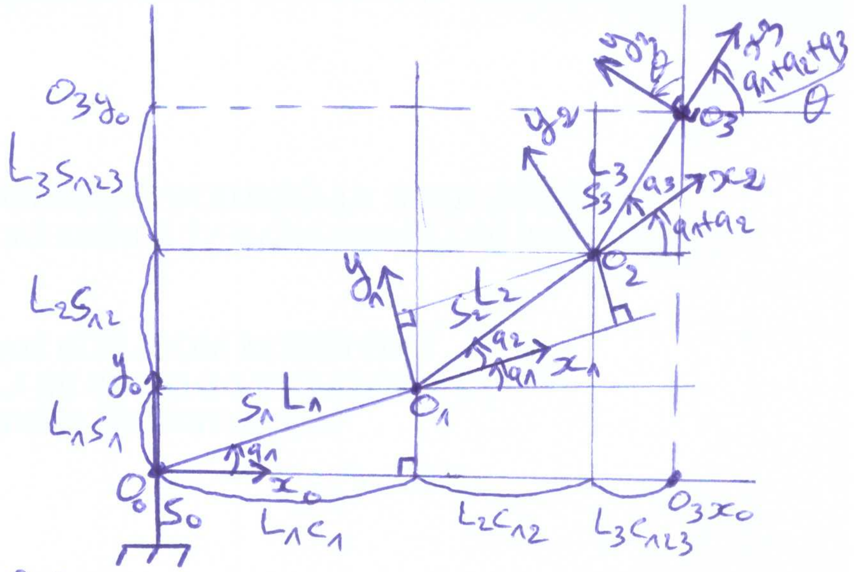
5) Transformation homogène globale $A_{0,2}$.

$$A_{0,2} = A_{0,1} \cdot A_{1,2} = \left[\begin{array}{cc|c} c_1 c_2 - s_1 s_2 & -c_1 s_2 - s_1 c_2 & L_2(c_1 c_2 - s_1 s_2) + L_1 c_1 \\ s_1 c_2 + c_1 s_2 & -s_1 s_2 + c_1 c_2 & L_2(s_1 c_2 + c_1 s_2) + L_1 s_1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$A_{0,2} = \left[\begin{array}{cc|c} \cos(q_1+q_2) & -\sin(q_1+q_2) & L_2 \cos(q_1+q_2) + L_1 \cos q_1 \\ \sin(q_1+q_2) & \cos(q_1+q_2) & L_2 \sin(q_1+q_2) + L_1 \sin q_1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Notations : $c_1 = \cos(q_1)$
$s_1 = \sin(q_1)$

Exo 5 :



1) Les segments :

S_0 : la base.

S_1, S_2 et S_3.

2) Les variables articulaires :

q_1, q_2 et q_3.

3) Les paramètres géométriques :

L_1, L_2, L_3.

5) Les transformations homogènes

* Position et rotation du repère {1} par rapport au repère {0}

$$t_{0,1} = \begin{bmatrix} L_1 \cos q_1 \\ L_1 \sin q_1 \end{bmatrix} ; \quad R_{0,1} = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 \\ \sin q_1 & \cos q_1 \end{bmatrix}.$$

$$A_{0,1} = \left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{R_{0,1}} & t_{0,1} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} \cos q_1 & -\sin q_1 & L_1 \cos q_1 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & L_1 \sin q_1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

* Position et rotation du repère {2} par rapport au repère {1}

$$t_{1,2} = \begin{bmatrix} L_2 \cos q_2 \\ L_2 \sin q_2 \end{bmatrix} ; \quad R_{1,2} = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 \\ \sin q_2 & \cos q_2 \end{bmatrix}.$$

$$A_{1,2} = \left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{R_{1,2}} & t_{1,2} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} \cos q_2 & -\sin q_2 & L_2 \cos q_2 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & L_2 \sin q_2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

* Position et rotation du repère {3} par rapport au repère {2}.

$$t_{2,3} = \begin{bmatrix} L_3 \cos q_3 \\ L_3 \sin q_3 \end{bmatrix} \; ; \quad R_{2,3} = \begin{bmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 \\ \sin q_3 & \cos q_3 \end{bmatrix}.$$

$$A_{2,3} = \left[\begin{array}{c|c} R_{2,3} & t_{2,3} \\ \hline 0 \quad 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} \cos q_3 & -\sin q_3 & L_3 \cos q_3 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & L_3 \sin q_3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

6) Transformation homogène globale :

$$A_{0,3} = \underbrace{\left[A_{0,1} \cdot A_{1,2}\right]}_{\substack{A_{0,2} \\ \uparrow \\ \text{Ex04}}} \cdot A_{2,3}.$$

$$A_{0,3} = \left[\begin{array}{cc|c} \cos(q_1+q_2) & -\sin(q_1+q_2) & L_2 \cos(q_1+q_2) + L_1 \cos q_1 \\ \sin(q_1+q_2) & \cos(q_1+q_2) & L_2 \sin(q_1+q_2) + L_1 \sin q_1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot A_{2,3}$$

Notons : $C_{12} = \cos(q_1+q_2)$

$S_{12} = \sin(q_1+q_2)$.

$$A_{0,3} = \left[\begin{array}{cc|c} C_{12} & -S_{12} & L_2 C_{12} + L_1 C_1 \\ S_{12} & C_{12} & L_2 S_{12} + L_1 S_1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cc|c} C_3 & -S_3 & L_3 C_3 \\ S_3 & C_3 & L_3 S_3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$A_{0,3} = \left[\begin{array}{cc|c} C_{12} C_3 - S_{12} S_3 & -C_{12} S_3 - C_3 S_{12} & L_3(C_{12} C_3 - S_{12} S_3) + L_2 C_{12} + L_1 C_1 \\ S_{12} C_3 + C_{12} S_3 & -S_{12} S_3 + C_{12} C_3 & L_3(S_{12} C_3 + C_{12} S_3) + L_2 S_{12} + L_1 S_1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$A_{0,3} = \left[\begin{array}{cc|c} C_{123} & -S_{123} & L_3 C_{123} + L_2 C_{12} + L_1 C_1 \\ S_{123} & C_{123} & L_3 S_{123} + L_2 S_{12} + L_1 S_1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

avec : $C_{123} = \cos(q_1 + q_2 + q_3)$.

$S_{123} = \sin(q_1 + q_2 + q_3)$.

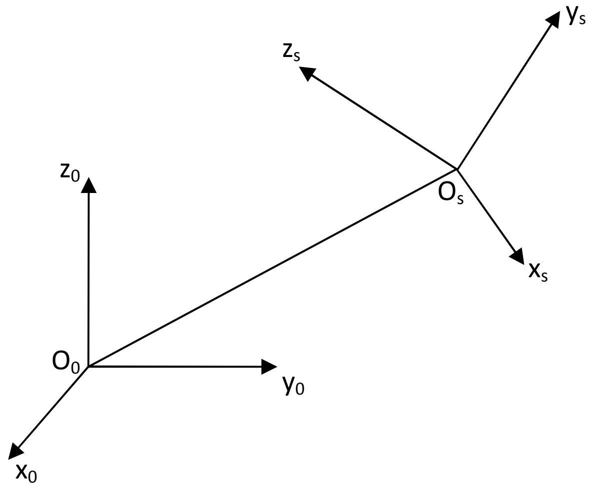
7) A partir de $A_{0,3}$ on tire $R_{0,3}$ et $t_{0,3}$.

$$R_{0,3} = \begin{bmatrix} C_{123} & -S_{123} \\ S_{123} & C_{123} \end{bmatrix} ; \quad t_{0,3} = \begin{bmatrix} L_3 C_{123} + L_2 C_{12} + L_1 C_1 \\ L_3 S_{123} + L_2 S_{12} + L_1 S_1 \end{bmatrix}$$

Les termes du vecteur $t_{0,3}$ peuvent être retrouvés dans le schéma, ainsi que l'angle de rotation globale $\theta = q_1 + q_2 + q_3$.

Exo 6 :

Etant donnée une matrice de rotation $R_{0,S}$ exprimant l'orientation du repère $\{R_S\}$ par rapport au repère $\{R_0\}$ (figure ci-contre) :



$$R_{0,S} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

On choisit d'interpréter cette orientation en utilisant la convention des angles d'Euler Z-Y-Z dont la matrice de rotation est exprimée en fonction des angles ϕ, θ, ψ telle que :

$$R_{\phi,\theta,\psi} = R_{\phi/z}\, R_{\theta/y}\, R_{\psi/z}$$

Avec :

$$R_{\phi/z} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ R_{\theta/y} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix},\ R_{\psi/z} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Exprimer les angles ϕ, θ, ψ en fonction des éléments de la matrice de rotation $R_{0,S}$ donnée.

Solution :

- Matrice de rotation des angles d'Euler Z-Y-Z :

$$R_{0,S} = R_{\phi/z}\, R_{\theta/y} R_{\psi/z}$$

$$R_{0,S} = \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\phi c_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta \\ s_\phi c_\theta c_\psi + c_\phi s_\psi & -s_\phi c_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{bmatrix}$$

Par identification des deux matrices on obtient les trois angles d'Euler ϕ, θ, ψ :

Pour θ :

$$\left.\begin{aligned} & r_{33} = c_\theta \\ & c_\theta^2 + s_\theta^2 = 1 \Rightarrow s_\theta = \pm\sqrt{1-c_\theta^2} = \pm\sqrt{1-r_{33}^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\pm\sqrt{1-r_{33}^2}}{r_{33}} = \frac{s_\theta}{c_\theta} = \tan(\theta)$$

$$\Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{1-r_{33}^2}}{r_{33}}\right) \quad ou \quad \theta = \operatorname{atan2}\left(r_{33}, \pm\sqrt{1-r_{33}^2}\right)$$

Pour ϕ :

$$\left.\begin{array}{l} r_{13} = c_\phi \, s_\theta \\ r_{23} = s_\phi s_\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{r_{23}}{r_{13}} = \frac{s_\phi}{c_\phi} = \tan(\phi) \Rightarrow \phi = \arctan\left(\frac{r_{23}}{r_{13}}\right) \; ou \;\; \phi = \operatorname{atan}2(r_{23},\, r_{13})$$

Pour ψ :

$$\left.\begin{array}{l} r_{31} = -s_\theta \, c_\psi \\ r_{32} = s_\theta \, s_\psi \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{r_{32}}{-r_{31}} = \frac{s_\psi}{c_\psi} = \tan(\psi) \Rightarrow \psi = \arctan\left(\frac{r_{32}}{-r_{31}}\right) \; ou \;\; \psi = \operatorname{atan}2(r_{32},\, -r_{31})$$